Devoir maison n° 2

À rendre le mercredi 17 septembre

Extrait d'un rapport du jury du CCINP : « *Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.* »

Exercice 1. *Autour de la série harmonique*
On s'intéresse ici à la série harmonique, c'est-à-dire à la série $\sum \frac{1}{n}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n sa somme partielle d'indice n.

Partie A - Développement asymptotique

Q1. Justifier que, pour tout $k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Q2. En déduire que la série harmonique est divergente et que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Q3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = H_n - \ln n$. Montrer que $u_n - u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

Q4. En déduire que la série de terme général $u_n - u_{n+1}$ est convergente.

Q5. En déduire qu'il existe un réel γ tel que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.
Le nombre γ est appelé constante d'Euler-Mascheroni. On a $\gamma \approx 0{,}577$.

Partie B - Quelques conséquences

Les questions de cette partie sont indépendantes mais utilisent toutes le résultat obtenu à la fin de la partie A.

Q6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ converge et calculer sa somme en fonction de γ.

Q7. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n(2n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Q8. Soit $a > 0$. Étudier la nature de la série $\sum a^{H_n}$.

Q9. ★ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $n_k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid H_n \geqslant k\}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \mathrm{e}$.

Exercice 2. *Démonstration de la formule de Stirling*
Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling vue en cours.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{n^n \,\mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ et $w_n = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

Q10. À l'aide d'un développement asymptotique, montrer que la série $\sum w_n$ converge.

Q11. En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite $\ell > 0$.

Q12. On admet[1] que $\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{p\pi}}$. En déduire la valeur de ℓ et conclure.

Q13. *Application* : grâce à la formule de Stirling, déterminer un équivalent de $\ln(n!)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Cela se montre en étudiant les intégrales de Wallis, on le (re)verra bientôt.